

TP 2
Bases de Gröbner : Géométrie euclidienne.

Ouvrir un terminal. Entrer dans le répertoire ACGA :

```
cd ACGA
```

puis lancer le notebook de sage sous jupyter :

```
sage -n jupyter
```

Créer une nouvelle feuille de calcul.

Dans tout ce TP, on calculera les bases de Gröbner dans le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels.

Exercice 1 : (Applications du TD)

- (Restriction d'idéaux) Soit l'idéal $I = \langle X^2Y, XZ^2, Y^2Z, YZ^2 \rangle$ de $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$.
Déterminer un système de générateurs de $I \cap \mathbb{Q}[Y, Z]$, vu comme idéal de $\mathbb{Q}[Y, Z]$.
- (Calcul de dimension) Soient $f = X^4 + X^2Y^2 + Y^3 - X^3$ et $I = \langle f, \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \rangle$.
 - Calculer la base de Gröbner minimale réduite de I pour l'ordre lexicographique avec $X < Y$.
On pourra utiliser la fonction `diff` de Sage.
 - Quelle est la dimension de $\mathbb{Q}[X, Y]/I$?
 - A-t'on $X^5 = Y^5 \pmod I$?
- (Forme normale) Soient $f = XYZ$ et $I = \langle Z - X^5, Y - X^3 \rangle$ avec $Z > Y > X$.
 - Déterminer une base de Gröbner de I pour l'ordre lexicographique, puis pour l'ordre lexicographique gradué.
 - Pour chacune de ces bases, déterminer la forme normale de f .

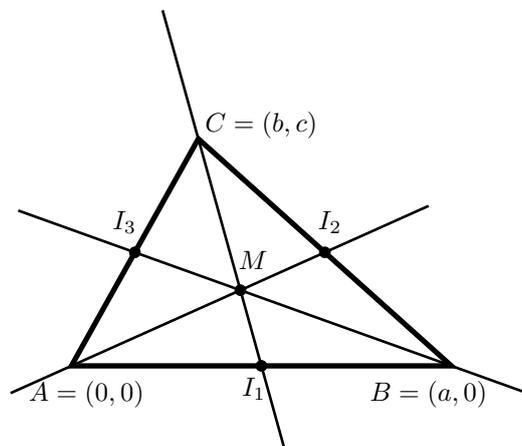
Exercice 2 : (Relations algébriques)

Déterminer toutes les relations algébriques entre x, y et z données par les paramétrisations suivantes :

- $x = t, y = t^2, z = t^3$.
- $x = t, y = t^2, z = \frac{1}{t}$.
- $x = t^3, y = t^4, z = t^5$.

Exercice 3 : (Médianes concourantes dans un triangle)

Montrer à l'aide de bases de Gröbner que les médianes d'un triangle non plat sont concourantes en un point. On écrira les équations des médianes du triangle ABC ci-dessous et on calculera une base de Gröbner associée.



Exercice 4 : (Droite d'Euler)

Montrer à l'aide de bases de Gröbner que l'orthocentre H , le centre de gravité G et le centre O du cercle circonscrit d'un triangle non plat sont alignés.

